



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
„ADOLF HAIMOVICI”  
ETAPA LOCALĂ - 14.02.2026**

**Clasa a XI – a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**Problema 1** (20 de puncte)

În mulțimea  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  și  $X(a) = I_2 + aA$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .

- Arătați că  $\det(A^2 - 3xA) = 0$ , oricare ar fi  $x$  real.
- Demonstrați că  $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$ ,  $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$ .
- Calculați  $X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(2026)$ .

**Soluție:**

- $A^2 = A$  2p  
 $\det A = 0$  2p  
 $\det(A^2 - 3xA) = \det((1 - 3x)A) = (1 - 3x)^2 \cdot \det A = 0$ . 6p
- $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + bA + aA + abA^2 = I_2 + aA + bA + abA = I_2 + (a + b + ab)A = X(ab + a + b)$ . 3p  
 $= I_2 + (a + b + ab)A = X(ab + a + b)$ . 2p
- $ab + a + b = (a + 1)(b + 1) - 1$ ,  $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$  1p  
 $X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(n) = X((n + 1)! - 1)$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$  3p  
 $n = 2026 \Rightarrow X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(2026) = X(2027! - 1)$ . 1p

**Problema 2** (20 de puncte)

Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{tg3(x-1)}{2x-2}, & x < 1 \\ \frac{x^2+ax+b}{x+1}, & x \geq 1 \end{cases}$ .

- Pentru  $a = -2$  și  $b = -3$  determinați domeniul de continuitate al funcției  $f$ .
- Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  pentru care funcția admite limită în punctul  $x_0 = 1$  iar dreapta de ecuație  $y = x - 3$  este asimptotă oblică spre  $+\infty$ .
- Determinați valorile parametrului real  $a$  pentru care  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} \right]^{3x} = e^6$ .

**Soluție:**

- $f$  continuă pe  $\mathbb{R} - \{1\}$  1p  
 $f$  nu este continuă în punctul  $x = 1$  3p  
Domeniul de continuitate al funcției este  $\mathbb{R} - \{1\}$ . 1p
- $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow a + b = 2$  2p  
 $y = x - 3$  este asimptotă oblică spre  $+\infty$  atunci  $m = 1$  și  $n = -3$  2p  
 $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = -3$  atunci  $a = -2$  și  $b = 4$ . 3p
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} \right]^{3x} = e^{3(a-1)}$  5p  
 $e^{3(a-1)} = e^6 \Rightarrow a = 3$ . 3p

**Problema 3** (20 de puncte)

Se consideră funcția  $f: \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + \ln(2x + 1) - \ln(2x - 1)$ .

- a) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$ .  
 b) Arătați că ecuația  $f(x + 1) = f(x)$  are cel puțin o soluție în  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ .

**Soluție:**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2x+1}{2x-1} =$  (5p)  
 $= \ln 1 = 0.$  (5p)

b) Fie  $h: \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x + 1) - f(x)$  continuă pe  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$  (2p)

$h(x) = 3 + \ln \frac{(2x+3)(2x-1)}{(2x+1)^2}$  (3p)

$\lim_{x \searrow \frac{1}{2}} h(x) = -\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3 > 0$  (2p)

Ecuația  $h(x) = 0$  are cel puțin o soluție în  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow$

$f(x + 1) = f(x)$  are cel puțin o soluție în  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ . (3p)

**Problema 4** (30 de puncte)

O firmă de distribuire a medicamentelor are depozitul în localitatea  $A(-2; -1)$  și, în fiecare zi de luni, livrează medicamente în punctele farmaceutice din localitățile  $B(1; 5)$ ,  $C(4; -3)$  și  $D(-1, 1)$  (unitatea de măsură este de 1 u.m. la 10 km). Localitățile sunt legate prin drumuri drepte.

- a) Arătați că punctele corespunzătoare localităților  $A$ ,  $B$  și  $D$  sunt coliniare.  
 b) Demonstrați că aria suprafeței plane mărginită de drumurile care trec prin localitățile  $A$ ,  $B$  și  $C$  este divizibilă cu 3.  
 c) Determinați numărul real negativ  $a$  pentru care distanța de la localitatea  $E(2a - 1; 3a)$  la drumul  $AB$  este  $\sqrt{5}$  u.m..

**Soluție:**

a) Condiția de coliniaritate (4p)  
 Verificarea condiției și finalizarea. (6p)

b)  $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = 21$  (8p)  
 $\mathcal{A}_{\triangle ABC} : 3.$  (2p)

c)  $AB: 2x - y + 3 = 0$  (3p)  
 $d(E, AB) = \frac{|2(2a-1) - 3a + 3|}{\sqrt{5}}$  (3p)

$d(E, AB) = \sqrt{5} \Rightarrow |a + 1| = 5$  (2p)

$a < 0 \Rightarrow a = -6.$  (2p)